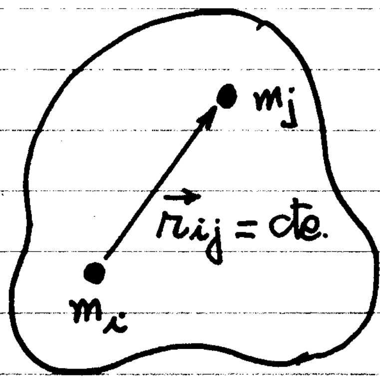
§5. Dinâmica dos corpos rígidos

Um corpo rígido é um arranjo de um sistema de muitas partículas, onde as distâncias entre as partículas estão fixas.

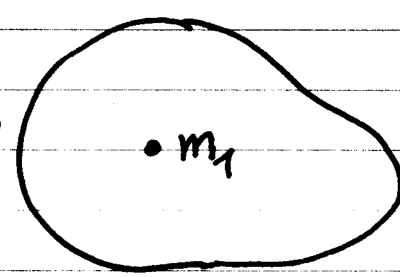


Para a maioria dos corpos sólidos consideramos a distribuição de massa como sendo contínua: o corpo será descrito através de uma função 'densidade de massa' $\rho(\vec{r})$, que pode variar de ponto para ponto.

Usaremos a versão discreta ou contínua, segundo seja conveniente.

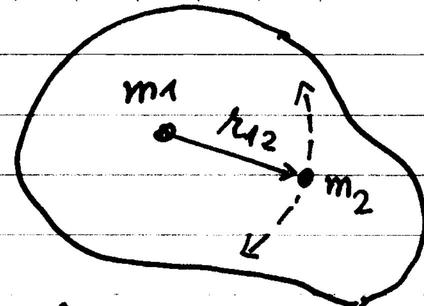
O sistema é composto de muitas partículas, mas também temos muitos vínculos, de maneira que os graus de liberdade são um número pequeno. Contamos esses graus de liberdade:

i) Escolhemos uma partícula no corpo. Seja m_1. Esta possui $\underline{3}$ graus de liberdade.

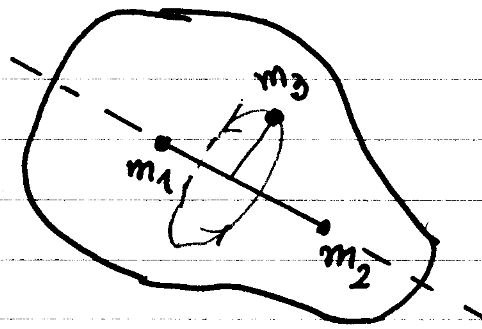


Todas as outras partículas estão a distâncias fixas de m_1.

ii) Uma vez que escolhemos um sistema de referência onde m_1 está fixa, uma outra partícula m_2 tem 2 graus de liberdade, pois se movimentará na superfície de uma esfera de raio r_{12}.



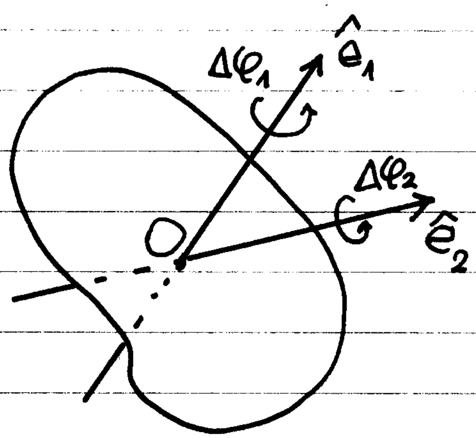
iii) Escolhendo um sistema de referência onde m_1 e m_2 estão fixas, uma outra partícula m_3 no corpo terá apenas um grau de liberdade, porque terá que movimentarse num circulo em torno do eixo que liga m_1 e m_2 (mantendo as distâncias a m_1 e m_2 fixas).

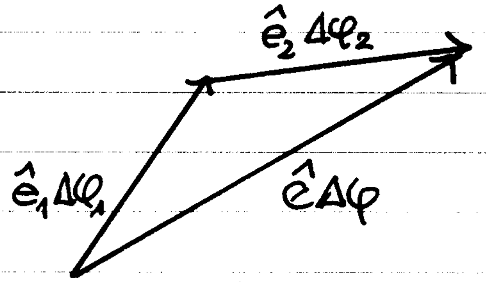


<u>Total</u>: $3+2+1 = 6$ graus de liberdade

3 graus de liberdade são de translação
3 graus de liberdade são de rotação

Usualmente, congelamos os graus de translação do CM e estudamos só as rotações relativas (mas não sempre). Aqui enfrentamos um problema: as rotações não podem ser representadas por vetores porque elas <u>não</u> comutam em geral e não obedecem a lei de adição de vetores. O problema pode ser circundado se considerarmos rotações infinitesimais. Neste caso não importa a ordem em que duas rotações são realizadas, enquanto os ângulos de rotação sejam suficientemente pequenos. Supomos que todos os eixos passam por um ponto O que é comum para todas as rotações (poderia ser o CM). Neste caso, existe existe uma rotação simples $(\hat{e}, \Delta\varphi)$ que é equivalente à soma das rotações $(\hat{e}_1, \Delta\varphi_1)$ e $(\hat{e}_2, \Delta\varphi_2)$:





$$\Delta\varphi\,\hat{e} = \Delta\varphi_1\,\hat{e}_1 + \Delta\varphi_2\,\hat{e}_2 .$$

Para entender este argumento, consideramos duas rotações finitas

$R_1(\varphi_1, \hat{e}_1)$, $R_2(\varphi_2, \hat{e}_2)$. Temos que em geral

$$R_1(\varphi_1, \hat{e}_1)R_2(\varphi_2, \hat{e}_2) \neq R_2(\varphi_2, \hat{e}_2)R_1(\varphi_1, \hat{e}_1)$$

Agora consideramos que as rotações R_1 e R_2 são realizadas para ângulos infinitesimais $\Delta\varphi_1$ e $\Delta\varphi_2$. Devemos ter uma expansão do tipo:

$$R_1(\Delta\varphi_1, \hat{e}_1) = 1 + \Delta\varphi_1 D_1(\hat{e}_1) + \dots$$

$$R_2(\Delta\varphi_2, \hat{e}_2) = 1 + \Delta\varphi_2 D_2(\hat{e}_2) + \dots$$

Guardamos sempre termos lineares em $\Delta\varphi_1$ e $\Delta\varphi_2$:

$$R_1(\Delta\varphi_1,\hat{e}_1)R_2(\Delta\varphi_2,\hat{e}_2) = 1 + \Delta\varphi_1 D_1(\hat{e}_1) + \Delta\varphi_2 D(\hat{e}_2) +$$
$$+ (\text{termos de ordem superior})$$

Com termos até primeira ordem vemos que:

$$R_1 R_2 = 1 + \Delta\varphi_1 D_1(\hat{e}_1) + \Delta\varphi_2 D_2(\hat{e}_2) = R_2 R_1$$

Portanto devemos ter:

$$R_1(\Delta\varphi_1,\hat{e}_1)R_2(\Delta\varphi_2,\hat{e}_2) = R(\Delta\varphi,\hat{e}),$$

com

$$\Delta\varphi_1 D_1(\hat{e}_1) + \Delta\varphi_2 D_2(\hat{e}_2) = \Delta\varphi\ D(\hat{e})$$

e a relação mais simples é a soma vetorial:

$$\Delta\varphi_1 \hat{e}_1 + \Delta\varphi_2 \hat{e}_2 = \Delta\varphi \hat{e}.$$

Se as rotações infinitesimais têm lugar durante um tempo infinitesimal Δt, podemos definir uma grandeza vetorial:

▸ <u>Def</u> Velocidade Angular, $\vec{\omega}$

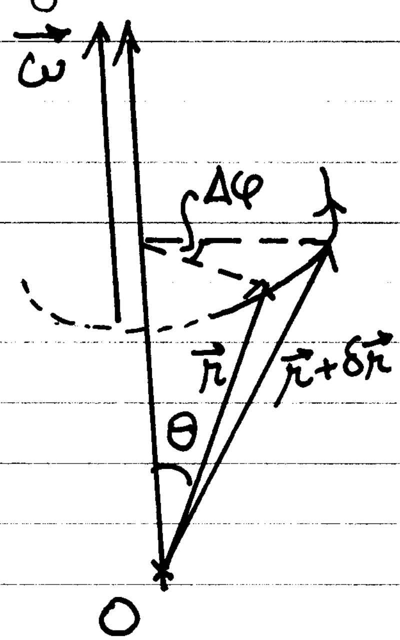
$$\vec{\omega} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \hat{e}}{\Delta t}$$

<u>Note que:</u>

$\vec{\omega}$ define o vetor 'velocidade angular' que aponta na direção do eixo instantâneo de rotação e cuja magnitude é igual à variação do ângulo por unidade de tempo. A direção de $\vec{\omega}$ é definida pela 'regra da mão direita'.

A velocidade de qualquer ponto fixo no corpo rígido pode ser expressada em termos da velocidade angular:

tomando a origem O num ponto do corpo sobre o eixo de rotação (por exemplo, o CM), chamamos $\vec{r}$ a posição de um ponto específico do corpo rígido, no sistema de referência do laboratório.



Vemos o vetor $\vec{r}$ rodar sobre um cone em torno do eixo instantâneo de rotação. A variação $\delta\vec{r}$ durante um tempo infinitesimal Δt é dada por

$$|\delta\vec{r}| = r \,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \omega \Delta t \,,$$

ou seja

$$|\vec{v}| = r\omega \,\mathrm{sen}\,\theta = |\vec{\omega}\times\vec{r}|$$

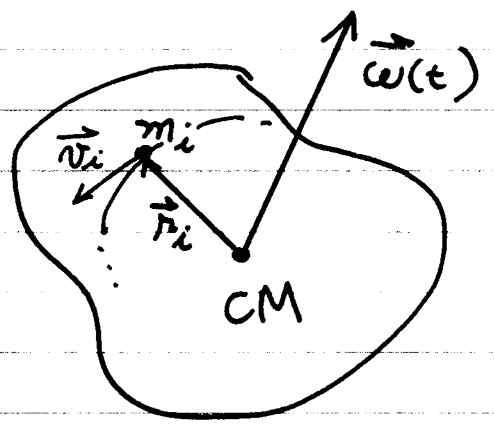
Verificamos que:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

Consideramos por enquanto, o corpo rígido como um sistema de partículas, com massa total M dada por:

$$M = \sum_i m_i \,.$$

Na ausência de forças externas ($\vec{F} = 0$), é conveniente usar como origem o CM do corpo, porque sempre existe um sistema inercial onde o CM se encontra em repouso:



$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = 0,$$

$$\vec{V} = 0 \,.$$

O corpo rígido rodará em torno de um eixo que passa pela origem. Calculamos o momentum angular no SRLab:

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i \{\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\}.$$

Precisamos da expressão:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

ou seja:

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega}\, \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

Portanto, para o momentum angular obtemos:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{r}_i^{\,2}\, \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}_i \right].$$

Todas as partículas possuim o mesmo $\vec{\omega}$, assim resulta que o momentum angular poderá ser escrito em termos das 3 componentes de $\vec{\omega}$.

Vemos que no lado direito temos um 'objeto' que depende de duas direções, $\vec{\omega}$ e $\vec{r}_i$, portanto ele representa a contração de um tensor.

▸ <u>**Def.**</u> Tensor de Inércia ou Momentos de Inércia

$$\overleftrightarrow{I} = \sum_i m_i \left[r_i^2\, \overleftrightarrow{\mathbb{1}} - \overleftrightarrow{\vec{r}_i \otimes \vec{r}_i} \right]$$

I é um tensor simétrico cujas componentes são dadas por:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\delta_{\alpha\beta}\, r_i^2 - r_i^\alpha r_i^\beta \right],$$

com $\alpha, \beta = x, y, z$. Escrevemos as componentes por extenso.

Diagonais ('momentos de Inércia'):

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Para os componentes não-diagonais, temos ('produtos de Inércia'):

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i \,,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i \,,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum m_i y_i z_i \,.$$

O momentum angular se escreve como:

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$$

e em componentes:

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \,,$$

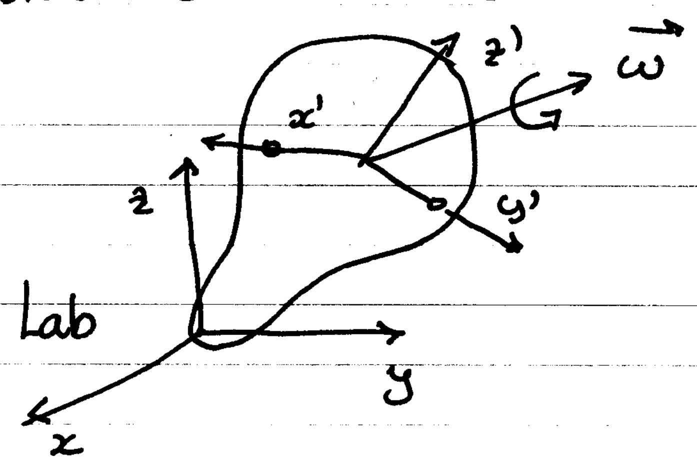
ou na notação abreviada:

$$L_\alpha = \sum_{\beta = x,y,z} I_{\alpha\beta} \, \omega_\beta$$

As grandezas $I_{\alpha\beta}$ dependem da distribuição de massa do corpo rígido e da orientação do corpo relativa ao sistema de referência inercial (lab.)

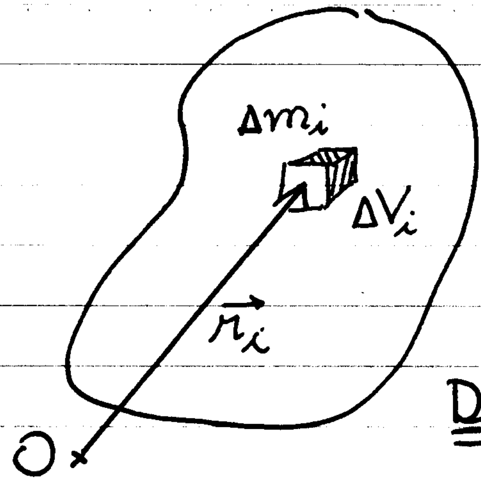
Portanto eles serão funções do tempo. Vemos que para um corpo rígido geral, $\vec{L}$ não é mais o produto de um escalar vezes $\vec{\omega}$. De maneira geral, $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ não serão paralelos. Em casos particulares, como simetria esférica $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ são paralelos.

É claro que é mais conveniente definir o tensor de inércia em relação a um sistema de coordenadas fixo no corpo rígido. Daqui em diante faremos isso. Note que neste caso, $I_{\alpha\beta}$ só dependerá da distribuição de massa do corpo. A desvantagem é que esse sistema de coordenadas rotatório não é um sistema inercial (é acelerado) e isso terá que ser levado em conta no tratamento da dinâmica



$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i^{\,\prime 2} \delta_{\alpha\beta} - x_i^{\prime\alpha} x_i^{\prime\beta} \right]$$

Agora iremos a considerar o limite de uma distribuição contínua de massa para o corpo.



$$\Delta m_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$$

ΔV_i : volume infinitesimal
Δm_i : massa infinitesimal no volume ΔV_i

Def. Densidade de massa

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}(\vec{r}).$$

A massa total M é obtida por:

$$M = \sum_i \Delta m_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i$$

$\downarrow$ contínuo

$$= \int_{\text{Todo o corpo}} dV \, \rho(\vec{r}) = \int_{\text{Corpo}} d^3x \, \rho(\vec{r})$$

Centro de Massa de um corpo rígido :

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_i \rho_i \Delta V_i \vec{r}_i$$

$\downarrow$ contínuo

$$= \frac{1}{M}\int_{\text{Corpo}} d^3x \, \rho(\vec{r})\vec{r}$$

Em componentes :

$$R_\alpha = \frac{1}{M} \int_{\text{Corpo}} d^3x \; x_\alpha \, \rho(\vec{r}) \qquad , \alpha = x, y, z$$

A integração pode ser estendida a todo o espaço, porque fora do corpo
$\rho \equiv 0$.

Tensor de Inércia

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i \Delta m_i \left[r_i'^2 \delta_{\alpha\beta} - x_i'^\alpha x_i'^\beta \right]$$

$\downarrow$ contínuo

$$= \int_{\text{Corpo}} d^3x \, \rho(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta \right).$$

Ex: tensor de inércia de uma esfera de densidade uniforme ρ_0 e raio R.

Por causa de simetria esférica, tomando a origem no centro da esfera, todos os produtos de inércia são nulos:

$$I'_{xy} = I'_{xz} = I'_{yz} = 0$$

Os momentos de inércia são todos iguais:

$$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = I'$$

$$I' = \frac{1}{3}\int d^3x\, \rho_0 (3r^2 - r^2) = \frac{1}{3}\int d^3x\, \rho_0\, 2r^2$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^R \rho_0\, r^2 dr \cdot r^2 \cdot 4\pi$$

$$= \frac{8\pi}{3}\rho_0\, \frac{1}{5}R^5 = \left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho_0\right)\frac{2}{5}R^2$$

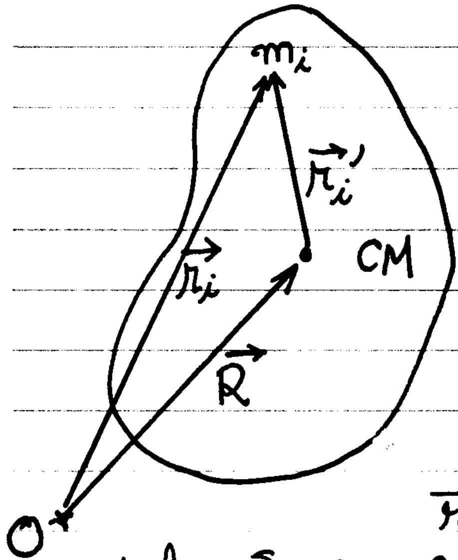
$$= \frac{2}{5}MR^2$$

Neste caso, o tensor de inércia é diagonal. Temos

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega} = \frac{2}{5}MR^2\,\vec{\omega}\,,$$

resultando $\vec{L}$ pararelo a $\vec{\omega}$.

Teorema dos eixos paralelos



Calculamos o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo ponto O, considerado como origem. Seja $\vec{R}$ a coordenada do CM. Temos que:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{R} \, ,$$

$\vec{r}_i{}'$ é a coordenada de m_i em relação ao CM. Em componentes:

$$x_i^\alpha = x_i'^\alpha + R_\alpha \, , \quad \alpha = x, y, z$$

Seja $I^{(0)}$ o tensor de inércia em relação a um eixo que passa por O:

$$I^{(0)}_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_i^\alpha x_i^\beta \right]$$

$$= \sum_i m_i \left[\left(\vec{r}_i'^2 + \vec{R}^2 + 2\vec{r}_i{}' \cdot \vec{R} \right) \delta_{\alpha\beta} - (x_i'^\alpha + R_\alpha)(x_i'^\beta + R_\beta) \right]$$

$$= \sum_i m_i \left(r_i'^2 \delta_{\alpha\beta} - x_i'^\alpha x_i'^\beta \right) +$$

$$+ \left(\sum_i m_i \right) \left(\vec{R}^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right)$$

Os termos lineares em $x_i'^{\alpha}$ ou $x_i'^{\beta}$ se cancelam porque estão referidos ao CM:

$$\sum_i m_i x_i'^{\alpha} = 0 , \quad \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

Assim temos o resultado:

$$\boxed{I_{\alpha\beta}^{(0)} = I_{\alpha\beta}^{(CM)} + M\left(R^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta\right)}$$

Seja o momento segundo o eixo 'z':

$$I_{zz}^{(0)} = I_{zz}^{(CM)} + M\left(X^2 + Y^2\right)$$

$I_{zz}^{(0)}$ é o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo 'z' que passa pelo ponto O. A distância entre os eixos paralelos é $(X^2+Y^2)^{1/2}$, onde

$\vec{R} = (X, Y, Z)$ é a coordenada do CM.

"O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo CM, mais o momento de inércia em relação ao eixo dado de uma partícula 'fictícia' de massa M localizada no CM."

Energia cinética de rotação

A energia cinética de um corpo rígido referida a um SRI onde o CM está em repouso é chamada de 'Energia de Rotação' do corpo.
Ela se expressa por:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Usando uma permutação cíclica dos fatores

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \; \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

identificamos o momentum angular $\vec{L}$

$$K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right).$$

A forma final:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}}$$

é <u>invariante</u> por uma mudança do sistema de coordenadas. O mais conveniente é um sistema de coordenadas fixo no corpo.
Expandindo em componentes:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta I_{\alpha\beta} \quad ,$$

que na notação matricial se escreve:

$$K = \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_{yy} & I_{yz} \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

No caso de uma esfera com origem no centro da esfera, temos:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

e para os momentos de inércia:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I .$$

A energia cinética se expressa por:

$$K = \frac{1}{2} I\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right) = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Comparar a forma da energia de rotação com a energia cinética de translação:

$$K_T = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Temos as correspondências:

trans.		rot.
m	$\longrightarrow$	I
$\vec{v}$	$\longrightarrow$	$\vec{\omega}$